



П. А. ФЛОРЕНСКИЙ

Мнимости в геометрии.

Расширение области

двухмерных образов геометрии.

Опыт нового истолкования мнимостей

<Фрагмент>

<...>

§ 9. В качестве предварительного сообщения, к изложенному выше пусть присоединится еще несколько мыслей, по широте своего охвата и по ответственности не притязающих, в этом кратком изложении, на полную обоснованность. Но ради закругленности теории мнимостей представляется полезным наметить ходы дальнейшей разработки и некоторые возможные применения. А кроме того, мне хотелось не оставить без отклика отпразднованный 14 сентября 1921 года, на пороге нового духовного синтеза, шестисотлетний юбилей кончины величайшего из выразителей целостного миропонимания. Думается, предложенное здесь истолкование мнимостей, в связи со специальным и с общим принципами относительности, по новому освещает и обосновывает то Аристотель-Птолемее-Дантово миропредставление, которое наиболее законченно выкристаллизовано в «Божественной Комедии».

Напомним, для начала, самый остов Дантовой космологии. Сделать это тем более необходимо, что в комментариях на «Божественную Комедию» обычно дается изображение: сфера Земли, окруженная сферами небесных светил, небом неподвижных звезд, кристалльным небом и, наконец, эмпиреем, причем Дантов путь по выходе его из недр Земли, начерчен ломаной линией, спирально переходящей по концентрическим сферам

и загибающийся на 180° , к зениту Сиона. Но этот чертеж не соответствует ни повествованию Данта, ни основам его космологии. Картина этой вселенной неизобразима эвклидовскими чертежами, как Дантовская метафизика несоизмерима с философией Канта. Математиками, — Хальстедом (1905), Вебером (1905), Симоном (1912) — уже отмечено предвосхищение Дантом неэвклидовой геометрии, например в вопрошании явившегося Господа царем Соломоном, домогающимся узнать: ...можно ль треугольник начертить в полукруге без «прямого» при процессе черчения?

Итак, припомним путь Данта с Вергилием. Он начинается в Италии. Оба поэта спускаются по кручам воронкообразного Ада. Воронка завершается последним, наиболее узким кругом Владыки преисподней. При этом обоими поэтами сохраняется во все время нисхождения вертикальность — головою к месту схода, т. е. к Италии, и ногами — к центру Земли. Но, когда поэты достигают приблизительно поясицы Люцифера, оба они внезапно переворачиваются, обращаясь ногами к поверхности Земли, откуда они вошли в подземное царство, а головою — в обратную сторону (Ад, песнь XXIII):

- 74 По ключьям шерсти (Люцифера) и коре ледяной,
Как с лестницы спускалась тень Вергиля.
- 70 Когда же мы достигли точки той,
Где толща чресл вращает бедр громаду, —
Вождь опрокинулся туда головой
- 79 Где он стоял ногами, и по гаду
За шерсть цепляясь, стал всходить в жерло:
Я думал, вновь он возвращался к Аду.
- 83 «Держись мой сын!» сказал он, тяжело
Переводя свой дух от утомленья:
Вот путь, которым мы покинем зло,
- 85 Тут в щель скалы пролез он, на каменья
Меня ссадил у бездны и в виду
Стал предо мною, полы благоговенья.
- 86 Я поднял взор и думал, что найду,
Как прежде Диса, но увидел ноги,
Стопами вверх поднятыми во льду.
- 91 Как изумился я тогда в тревоге,
Пусть судит чернь, которая не зрит,
Какую грань я миновал в дороге.
- 94 «Встань на ноги», заговорил пиит...

(Перев. Д. И. Мина)

Миновав эту грань (которой и до сих пор эвклидовская «чернь не зрит»), т. е. окончив путь и миновав центр мира, поэты оказываются под гемисферой противоположной той, «где распят был Христос»: они подымаются по жерлообразному ходу.

- 133 Мой вождь и я сей тайною тропую
Спешили снова выйти в Божий свет
И, не предавшись ни на миг покою,
136 Взбирались вверх — он первый, я во след.
Пока узрел я в круглый выход бездны
Лазурь небес и дивный блеск планет.
139 И вышли мы, да узрим своды звездны.

После этой грани поэт восходит на гору Чистилища и возносится чрез небесные сферы. — Теперь — вопрос: по какому направлению? Подземный ход, которым они поднялись, образовался падением Люцифера, низвергнутого с неба головою. Следовательно, место, откуда он низвергнут, находится не вообще где-то на небе, в пространстве, окружающем Землю, а именно со стороны той гемисферы, куда попали поэты. Гора Чистилища и Сион, диаметрально противоположные между собою, возникли как последствия этого падения, и, значит, путь к небу направлен по линии падения Люцифера, но имеет обратный смысл. Таким образом, Дант все время движется по прямой и на небе стоит — обращенный ногами к месту своего спуска; взглянув же оттуда из Эмпирея, на Славу Божию, в итоге оказывается он, без особого возвращения назад, во Флоренции. Путешествие его было действительностью; но если бы кто стал отрицать последнее, то во всяком случае оно должно быть признано поэтической действительностью, т. е. представимым и мыслимым, — значит, содержащим в себе данные для уяснения его геометрических предпосылок. Итак, двигаясь все время вперед по прямой и перевернувшись раз на пути, поэт приходит на прежнее место в том же положении, в каком он уходил с него. Следовательно, если бы он по дороге не перевернулся, то прибыл бы по прямой на место своего отправления уже вверх ногами. Значит, поверхность, по которой двигается Дант, такова, что прямая на ней, с одним перевертом направления, дает возврат к прежней точке в прямом положении; а прямолинейное движение без переверта — возвращает тело к прежней точке перевернутым. Очевидно, это — поверхность 1° , как содержащая

замкнутые прямые, есть риманновская плоскость¹, и 2°, как переворачивающая при движении по ней перпендикуляр, есть поверхность односторонняя. Эти два обстоятельства достаточны для геометрического охарактеризования Дантова пространства, как построенного по типу эллиптической геометрии. Напоминаем, что Риман, пользуясь собственно дифференциальными методами исследования, не имел возможности рассмотреть форму полных поверхностей. В силу этого предметом его геометрических обсуждений были безразлично две далеко не тождественные между собою, геометрии, из которых одна полагает в основу плоскость эллиптическую, другая же — сферическую. В 1871 году Ф. Клейн указал, что сферическая плоскость обладает характером поверхности двусторонней, а эллиптическая — односторонней. Дантово пространство весьма похоже именно на пространство эллиптическое. Этим бросается неожиданный пучок света на средневековое представление о конечности мира. Но в принципе относительности эти общегеометрические соображения получили недавно неожиданное конкретное истолкование, и с точки зрения современной физики мировое пространство должно быть мыслимо именно как пространство эллиптическое, и признается конечным, равно как и время, — конечное, замкнутое в себе.

На этом поразительном юбилейном подарке Средневековью о враждебной ему галилеевской науки дело, однако, не кончается. И вот некоторые дальнейшие сопоставления.

Вопрос идет о реабилитации Птолемея-Дантовой системы мира. Принцип относительности «доказывается» неудачей опыта Майкельсона и Морлея². Не сомневаясь в общем принципе относительности и лишь несколько недоумевая, что значит в специальном принципе «прямолинейное равномерное движение», коль скоро нет неподвижных координатных осей, я хотел бы, однако, задать простой вопрос о причине неудачи вышеупомянутого опыта. В основу опыта положена гипотеза о движении Земли, и когда последствий этого движения не обнаружилось, тогда стал придумываться ряд чрезвычайных новых гипотез, которыми хотели подпереть первую гипотезу о движении Земли. Но гипотеза, признанная наиболее основательной, — специальный принцип относительности — будучи вполне приемлемой сама по себе, однако в корень уничтожает самую предпосылку Майкельсона, ибо утверждает, что никаким физическим опытом убедиться в предполагаемом движении Земли невозможно. Иначе говоря, Эйнштейн объявляет систему

Коперника чистой метафизикой, в самом порицательном смысле слова. А если так, то не проще ли было бы, чем хватать себя за ухо через голову, начать объяснение Майкельсоновской неудачи наиболее естественным предположением — о ложности его основной предпосылки: предполагали, что опыт удастся, потому что рассчитывали на скорость Земли (гипотетическую!) 30 клм/сек; но опыт не удался, и, следовательно, прежде всего нужно было заподозрить допущенную гипотезу и подумать, движется ли, в самом деле, Земля? — Земля покоится в пространстве — таково прямое следствие опыта Майкельсона. Косвенное следствие — это надстройка, именно утверждение, что понятие о движении — прямолинейном и равномерном — лишено какого-либо уловимого смысла. А раз так, то из-за чего же было ломать перья и гореть энтузиазмом якобы достигнутого устройства вселенной?

Но, кроме поступательного движения Земли, приходится иметь в виду еще вращательное, и тут, казалось бы, Коперник что-то «открыл». Этому предположению противостоит обобщенный принцип относительности, в формулировке Ленарда гласящий: «при любых движениях, все явления природы должны протекать совершенно одинаково, будет ли наблюдатель или все окружающее пространство приведено в соответствующее движение». Иначе говоря, применительно к нашему частному случаю, нет и принципиально не может быть доказательств вращения Земли, и в частности, ничего не доказывает пресловутый опыт Фуко³: при неподвижной Земле и вращающемся вокруг нея, как одно твердое тело, небосводе, маятник так же менял бы относительно Земли плоскость своих качаний, как и при обычном, коперниковском предположении о Земном вращении и неподвижности Неба. Вообще, в Птолемеевой системе мира, с ее хрустальным небом, «твердью небесною», все явления должны происходить так же, как и в системе Коперника, но с преимуществом здравого смысла и верности земле, земному, подлинно достоверному опыту, с соответствием философскому разуму и, наконец, с удовлетворением геометрии. Но было бы большою ошибкой объявлять системы коперниковскую и птолемеевскую равноправными способами понимания: они таковы — только в плоскости отвлеченно-механической, но, по совокупности данных, истинной оказывается последняя, а первая — ложной. Это прямое подтверждение великой поэмы, хотя и более чем через 600 лет.

Впрочем, и им углубленное понимание Птолемея-Дантовской системы только начинается, ибо современная научная мысль,

совершенно неожиданно, подводит нас к Данте-Аристотелевской науке о началах сущего. Специальный принцип относительности выражается иногда в виде признаваемого ему равносильным принципа предельности мировых скоростей: не может быть скоростей больших скорости света 3.1010 см/сек. Но, если это верно, то как же, по общему принципу относительности, может быть допущено движение небосвода вокруг Земли, для которого требуются скорости неизмеримо превосходящие вышеозначенный предел? Так, стравив оба принципа, противники второго, т. е. очевидно защитники коперниканства, думали опровергнуть источник возражений себе, но, не вдумавшись достаточно, собственными руками вырыли себе яму.

Что собственно значит предельность величины 3.1010 см/сек? Это значит вовсе не невозможность скоростей равных и больших c , а — лишь появление вместе с ними вполне новых, пока нами наглядно непредставимых, если угодно — трансцендентных нашему земному, кантовскому опыту, условий жизни; но это вовсе не значит, чтобы таковые условия были немислимы, а может быть, c расширением области опыта, — и представимыми. Иначе говоря: при скоростях, равных c и тем более — больших c , мировая жизнь качественно отлична от того, что наблюдается при скорости меньших c , и переход между областями этого качественного различия мыслим только прерывный. Обращаясь к птолемеевской системе, мы видим, что внутренняя ее область, с экваториальным радиусом

$$R = (23 \text{ ч } 3 \text{ м } 56,6 \text{ с} / 2\pi \cdot 300\,000) \text{ км},$$

где $23 \text{ ч } 3 \text{ м } 56,6 \text{ с}$ есть продолжительность звездного времени по среднему солнечному времени, ограничивает собою все земное бытие. Это есть область земных движений и земных явлений, тогда как на этом предельном расстоянии и за ним начинается мир качественно новый, область небесных движений и небесных явлений, — попросту Небо. Этот демаркационный экватор, раздел Неба и Земли, не особенно далек от нас, и мир земного — достаточно уютен. А именно, в астрономических единицах длины радиус его R равен $27,522$ средних расстояний Солнца от Земли. Итак, область небесных движений в $26,5$ раз далее от Земли, чем Солнце; иначе говоря, граница ее — между орбитами Урана и Нептуна. Результат поразительный, потому что им Птолемее-Дантовское представление о мире подтверждается даже количественно, а граница мира приходится как раз там, где ее и признавали с глубочайшей древности.

Граница мира была за Ураном, — о котором сведения были уже смутные. Но вдумаемся, что значит этот результат конкретно. — Характеристики тел движущейся системы, наблюдаемой из неподвижной, зависят от основной величины

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v есть скорость движения системы, а c — скорость света. Пока v менее c , β действительно, и все характеристики остаются имманентными земному опыту; при v равном c , $\beta = 0$, и при v большем c , β делается мнимым. В двух последних случаях происходит двукратный качественный скачок соответственных характеристик. Так, в движущейся системе длина тел по направлению движения сокращается в отношении $\beta:1$, время — в отношении $1:\beta$, масса — в отношении $1:\beta$ и т. д.

Следовательно, на границе Земли и Неба длина всякого тела делается равной нулю, масса бесконечна, а время его, со стороны наблюдаемое — бесконечным. Иначе говоря, тело утрачивает свою протяженность, переходит в вечность и приобретает абсолютную устойчивость. Разве это не есть пересказ в физических терминах — признаков идей, по Платону — бестельных, непротяженных, неизменяемых, вечных сущностей? Разве это не аристотелевские чистые формы? или, наконец, разве это не воинство небесное, — созерцаемое с Земли как звезды, по земным свойствам чуждое?

Так — на пределе, при $\beta = 0$. Но за пределом, при $v > c$, время протекает в обратном смысле, так что следствие предшествует причине. Иначе говоря, здесь действующая причинность сменяется, — как и требует Аристотеле-Дантовская онтология — причинностью конечною, телеологией, — и за границу предельных скоростей простирается царство целей. При этом длина и масса тел делаются мнимыми. Когда для мнимостей нет конкретного истолкования, такой результат кажется странным, и именно неконкретность мышления о мнимостях до сих пор заставляет избегать сделанные здесь выводы исследователей новой механики. Но пора повергнуть два пугала мысли — мнимость и непрерывность, пора избавиться от *horror imaginarii* и *horror discontinuitatis*!⁴

Но имея в виду предлагаемое здесь истолкование мнимостей, мы наглядно представляем себе, как, стянувшись до нуля, тело проваливается сквозь поверхность — носительницу соответственной координаты, и выворачивается чрез само себя, — почему приобретает мнимые характеристики. Выражаясь образно, а при кон-

кретном понимании пространства — и не образно, можно сказать, что пространство ломается при скоростях больших скорости света, подобно тому, как воздух ломается при движении тел, со скоростями большими скорости звука; и тогда наступают качественно новые условия существования пространства, характеризуемые мнимыми параметрами. Но как провал геометрической фигуры означает вовсе не уничтожение ее, а лишь ее переход на другую сторону поверхности и, следовательно, доступность существам, находящимся по ту сторону поверхности, так и мнимость параметров тела должна пониматься не как признак ирреальности его, но — лишь как свидетельство о его переходе в другую действительность. Область мнимостей реальна, постижима, а на языке Данта называется Эмпиреем. Все пространство мы можем представить себе двойным, составленным из действительных и из совпадающих с ними мнимых гауссовых координатных поверхностей, но переход от поверхности действительной к поверхности мнимой возможен только чрез разлом пространства и выворачивание тела чрез самого себя. Пока, мы представляем себе средством к этому процессу только увеличение скоростей, может быть скоростей каких-то частиц тела, за предельную скорость c ; но у нас нет доказательств невозможности каких-либо иных средств.

Так, разрывая время, «Божественная Комедия» неожиданно оказывается не позади, а впереди нам современной науки.

1922, VII, 3/17
Сергиев Посад

